Exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère l'équation $(E_1): y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$

1) Déterminer une fonction polynôme du second degré (trinôme) g qui vérifie (E_1).

2) a- soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E_1) si et seulement si $(f-g)$ est une solution de l'équation $(E_0): y'' + 2y' + y = 0$

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0)

c) Donner la solutions générale de l'équation (E_1).

3) a) Déterminer la fonction φ solution de l'équation différentielle (E_1) , tel que la droite $(O;\vec{i})$ est la tangente à la courbe de φ au point O.

b) Déterminer une fonction h solution de l'équation (E_1) tel que: $h(0) = 0$ et $\int_0^1 h(x)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{e}$

Exercice

On considère l'équation différentielle suivante:

$$(E_1)\quad y'' + 2y' + 2y = 3\cos x - \sin x$$

1)Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = \cos x + \sin x$ est une solution de l'équation (E_1).

2) Résoudre l'équation différentielle: $(E_0): y'' + 2y' + 2y = 0$

3) Sont f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrer f est une solution de (E_1) si et seulement si : $f - g$ est solution de (E_0).

4) a) Déterminer la fonction φ solution de (E_1) tel que:

$\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$

b) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $|\varphi(x)| \leq 2\sqrt{2}$

Exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère l'équation différentielle: $(E_1): y' - 2y = \frac{-2}{1 - e^{-2x}}$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y' - 2y = 0$; puis déterminer la solution de (E_0) dont la courbe passe par le point $A(0;1)$.

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = e^{2x} g(x)$$

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et $g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b) Montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

c) Et déduire la solution générale de l'équation différentielle (E_1).

Exercice 9

On considère l'équation différentielle:

$$(E_1): y'' + n^2 y = n(n-1)\sin^{n-2}(x) \ ; \ n \in \mathbb{N}^*$$

1) Déterminer en fonction de n les solutions de l'équation différentielle: $(E_2): y'' + n^2 y = 0$

2) a) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $u(x) = \sin^n(x)$

Montrer que u est solution de l'équation (E_1).

b) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrer que f est solution de (E_1) si seulement si $(f-u)$ est solution de (E_2).

3) Déterminer g solution de l'équation (E_1) qui vérifie: $g(0) = 1$ et $g'(0) = -n$

Exercice 10

Soit S l'ensemble des fonctions f définies $\mathbb{R}$, et vérifiant :

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) - \int_0^x (x-t) f(t)\,dt = x$ (1)

1) On considère l'équation différentielle: $(E): y'' - y = 0$

a) Déterminons la fonction h solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe passe par le point $A\left(\ln 2; \frac{3}{4}\right)$, et admet en A une tangente de coefficient directeur $\frac{5}{4}$.

b) Soit x un élément de $\mathbb{R}$, calculer en utilisant une intégration par parties $I = \int_0^x t(e^t - e^{-t})\,dt$; puis, déduire que $h \in S$.

2) Soit f un élément de S

a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt$

Exercice

L'objectif de cet exercice et de montrer qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant deux conditions:

$$\begin{cases} f(0)=-4 & (1) \\ (\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(-x)\times f'(x)=1 & (2) \end{cases}$$

1)On suppose qu'il existe une seule fonction f qui vérifie les deux conditions (1) et (2)

on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(-x)f(x)$

a) Montrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

c) On déduire l'expression de la fonction g .

d) Montrer que f est une solution de l'équation différentielle $y'=\frac{1}{16}y$.

2) En déduire qu'il existe une seule fonction f qui vérifie les deux conditions (1) et (2)